Olimpiada de matematică
Etapa pe sector
21 februarie 2004

SOLUȚII SI BAREM DE CORECTARE
Clasa a V-a

Subiectul I

a. $2^{2+4+6+...+100} : 2^{1+3+5+...+99}$ **1 p.**

$2^{(2-1)+(4-3)+(6-5)+...+(100-99)} = 2^{\overbrace{1+1+...+1}^{de\,50\,de\,ori}}$ **1 p.**

2^{50} **1 p.**

b. $a^{3n+1} \cdot (a+1) + 3$ **1 p.**

$a^{3n} \cdot a(a+1) + 3$ **1 p.**

$a(a+1) \vdots 2 \Rightarrow a^{3n} \cdot a(a+1) \vdots 2$ **1 p.**

$a^{3n} \cdot a(a+1) + 3 \not\vdots 2$ **1 p.**

Total: 7 p.

Subiectul II

Dacă $a < b < c < d \Rightarrow \overline{abcd} = \overline{a(a+1)(a+2)(a+3)}$ **1 p.**

$a(a+3) = (11a+12):2$ **1 p.**

$a(a+3) \in \mathbb{N} \Rightarrow (11a+12) \vdots 2$ **1 p.**

$a \in \{2,4,6\}$ **1 p.**

$a = 4 \Rightarrow \overline{abcd} = 4567$ **1 p.**

Dacă $a > b > c > d \Rightarrow \overline{(d+3)(d+2)(d+1)d}$ **1 p.**

$S = \varnothing$ **1 p.**

Total: 7 p.

Subiectul III

Pentru $n = 1 \Rightarrow u(a) = 5$

$\qquad n = 2 \Rightarrow u(a) = 8$

$\qquad n \in \{3,4\} \Rightarrow u(a) = 0$ **2 p.**

Pentru $n \geq 5 \Rightarrow u(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n) = 0$ **1 p.**

Pentru $n \geq 5, n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u(a) = 6$ **2 p.**

Pentru $n \geq 5, n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow u(a) = 4$ **2 p.**

Total: 7 p.

Subiectul IV

Dacă $x_i \not\vdots 5, 1 \leq i \leq 500 \Rightarrow x_i \in \{M_5+1, M_5+2, M_5+3, M_5+4\}$ **2 p.**

$(M_5+1)^4 = M_5+1, (M_5+2)^4 = M_5+2^4 = M_5+1, (M_5+3)^4 = M_5+1,$

$(M_5+4)^4 = M_5+1$ **2 p.**

$N = M_5 + 2 + 4 + 6 + ... + 1000 = M_5 + 500 \cdot 501$ **2 p.**

$N \vdots 5$ **1 p.**

Total: 7 p.